Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica" [1]

D'Amore B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30. Questo articolo è stato pubblicato anche in altre lingue.

Bruno D'Amore

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Summary. In this article various interpretations of the terms "concept" and "object" in Mathematics are analysed, using the History of Philosophical Thought, Psychology, and the recent "anthropological" perspective, demonstrating how it could be necessary to enter into a "pragmatic" theory.

1. I concetti: terminologia diffusa, filosofica e letteraria.

Attorno alla natura dei concetti sono stati scritti libri interi e filosofi di primo piano si sono occupati di questo tema.[2]
Nei dizionari di filosofia si trovano definizioni abbastanza simili; prendo come prototipo la seguente, di stampo aristotelico: «In generale, ogni procedimento

[1] Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di ricerca locale: *Ricerche sul funzionamento del sistema allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*, finanziamenti ex-60%.
[2] Per la redazione di questo paragrafo 1, mi servo prevalentemente di D'Amore (1999), cap. 6.

che renda possibile la descrizione, la classificazione e la previsione degli oggetti conoscibili». Da notare che, in questa accezione:

- il concetto è un processo, dunque qualche cosa di dinamico e non di statico
- vi può essere concetto di qualsiasi cosa, dagli oggetti concreti (il concetto di *tavolo*) a quelli astratti (il concetto del *numero 3*); da quelli reali ad oggetti irreali, inesistenti, immaginari
- c'è differenza tra *nome* e *concetto*; basti pensare che nomi diversi possono essere pertinenti allo stesso concetto.

A questo punto scattano due problematiche fondamentali:

- la *natura* del concetto
- la *funzione* del concetto.

La domanda sulla *natura* del concetto ha avuto, in filosofia, due risposte diverse:

- il concetto è l'*essenza* stessa delle cose e dunque la loro essenza necessaria (ciò per cui le cose non possono che essere così come sono) (pur tra mille diversità, ovviamente, direi che questa idea, nata con Socrate, raffinata da Aristotele, ha avuto molti seguaci fino ad Husserl)
- il concetto è il *segno* dell'oggetto dunque si trova con esso in rapporto di significazione (l'idea è sostanzialmente stoica, ma ripresa in epoca medioevale, risalendo forse a Boezio e poi ad Abelardo; ma è stata fatta propria dai logici dell'inizio del XX secolo).

La domanda sulla *funzione* del concetto ha dato luogo a due concezioni fondamentalmente diverse:

- di tipo *finale*: il concetto ha come scopo quello di esprimere o rivelare la sostanza delle cose
- di tipo *strumentale*: ed allora si hanno vari ulteriori aspetti:
  - il concetto è uno strumento per *descrivere* gli oggetti e permetterne il *riconoscimento* (Epicurei e Stoici, anticamente; alcuni filosofi della scienza nel XX secolo)
  - il concetto è uno strumento per *classificare* i concetti nel modo più *economico* possibile (a questa idea aderisce, per esempio, Mach; e qui si scatena la questione secondo la quale quelli scientifici sono degli pseudo-concetti nel senso crociano)
  - il concetto è uno strumento per *organizzare* i dati dell'esperienza in modo da stabilire tra essi *connessioni* di carattere logico (idea accettata da Duhem)
  - il concetto è uno strumento per *prevedere* (possiamo citare qui Dewey e Quine, per esempio, anche se per motivi completamente diversi).

Tutt'altro modo di discorrere filosoficamente dei concetti è quello di scuola francese e tedesca. Più che *definire* i concetti, si cerca di analizzare *come si formino* i concetti. Abbiamo allora le seguenti distinzioni:

- concetti *a priori* o concetti *puri* (da Kant): sono i concetti che non si traggono dall'esperienza: concetti di unità, di pluralità eccetera (trovo tali esempi proprio in Kant)
- concetti *a posteriori* o concetti *empirici*: sono nozioni generali che definiscono classi di oggetti dati o costruiti; esempio: concetto di *vertebrato*, di *piacere* eccetera; essi concernono a tutti e soli quegli individui che formano queste classi, sia quando li si può isolare (*un* gatto, scelto nella classe dei vertebrati) o no (come sarebbe nel caso di *un* piacere).[3]

È chiaro allora come si possa parlare, in ogni caso, di *intensione* e di *estensione* di un concetto (mal che vada ci saranno concetti ad estensione vuota...).

Ma che cosa vuol dire, etimologicamente, *concetto*? Il suo nome latino (*conceptus*, da *concipere*) ha chiaro riferimento al risultato dell'atto di concepimento o generazione della mente nel suo staccarsi dall'immediatezza delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni particolari e nel suo giungere ad una significazione universale. Ma allora, si potrebbe pensare ad una coincidenza con la parola *idea*; oppure lo si potrebbe far coincidere con il λόγοζ (il *verbum*, la parola mentale); oppure ancora con *nozione*.
Ciascuna di queste interpretazioni (ed altre ancora) vennero nel tempo sostenute da eminenti filosofi. Ciò ci autorizza a confondere d'ora in poi *concetto* con *idea*, anche se in *idea* c'è implicita anche una sorta di *rappresentazione* mentre il *concetto* potrebbe esserne immune.

Se si passa a dizionari della lingua comune, non filosofici, editi in vari Paesi, per esempio si trova:

- «Ciò che la mente intende e comprende per mezzo dell'osservazione, riflessione e induzione»; a volte, oltre a *intende* e *comprende*, c'è anche un *conclude*
- «La creatura concepita - la cosa immaginata ed inventata dal nostro intelletto»
- «Pensiero che la mente forma derivando da due o più idee, assurgendo dall'individuale al generale; [ma anche:] Idea, opinione»
- «Pensiero, in quanto concepito dalla mente; più in particolare: idea, nozione esprimente i caratteri essenziali e costanti di una data realtà che la mente si forma afferrando insieme (...) i vari aspetti di un determinato oggetto che alla mente preme aver presenti nel suo complesso»
- «Termine filosofico riferito in generale al contenuto logico o al significato dei segni linguistici e delle immagini mentali».

[3] Questa è, per esempio, la posizione assunta da André Lalande nel suo *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* (PUF, Paris 1926).

Interessante può essere, per i nostri scopi introduttivi, vedere che uso fanno di questo termine alcuni letterati. Dante Alighieri usa *concetti* nel senso di *concezioni* in *Paradiso* 3-60; in questo stesso senso, lo si trova in molti letterati di tutti i Paesi del mondo. Ma è chiaro che i letterati fanno l'uso più vasto possibile di tale parola, come del resto si fa, ed è giusto che si faccia, nella lingua comune, dove *concetto* sta anche per *opinione*, *modo di intendere, principio, progetto, intenzione, stima, reputazione* eccetera, a seconda della lingua.

Tutto ciò solo per testimoniare l'enorme difficoltà e le varietà che si incontrano quando si voglia affrontare in modo significativo e un po' rigoroso una problematica che pone a monte di tutto una parola per la cui definizione sono state impiegate migliaia di anni.

2. I concetti: terminologia psicologica, sul versante didattico.

Se vogliamo fare progressi significativi e specifici, occorre cercare testi più adatti, più cònsoni allo spirito nell'àmbito del quale vogliamo muoverci.
Non posso allora non ricordare immediatamente che L. S. Vygotskij (1960, 1962) lavorò a lungo proprio sulla formazione dei concetti nell'àmbito di un suo più vasto campo di ricerca sul come cause sociali influissero sulle differenze psichiche degli individui (influenza dell'ambiente sulle differenze psichiche). Egli parla allora proprio di *sviluppo concettuale*, distinguendo sostanzialmente tre fasi (ma la cosa è assai più complessa e qui sorvolo):

- *fase dei mucchi sincretici*, caratterizzata dalla mancanza di una referenza oggettiva stabile;
- *fase del pensiero per complessi*; in tale fase il soggetto tende verso un modo oggettivo di pensare; il soggetto riconosce nessi concreti, ma non logici o astratti;
- *fase concettuale*; in tale fase il soggetto opera utilizzando la capacità di astrarre.

Attenzione particolare Vygotskij pose alla formazione dei concetti scientifici in particolare di tipo scolastico, durante l'infanzia, evidenziando l'ancoraggio che i bambini fanno di tali concetti a componenti concreto - figurative, molto prima che alle componenti logiche o astratte; tale priorità sembra essere necessaria per la "fondazione" stessa del concetto. A proposito dell'ordine dell'acquisizione dei concetti, Vygostkij (1962) fa una celebre affermazione, a prima vista paradossale, secondo la quale i concetti scientifici si sviluppano *prima* di quelli spontanei; ma Vygotskij dice anche: «se il programma fornisce il materiale appropriato»; insomma: la supposta necessità infantile di far precedere una fase

empirica a quella astratta di apprendimento non sembra essere così necessaria. [Torneremo sui concetti scientifici ed a Vygotskij in **4.**].
Ma allora si può mettere in discussione la posizione di J. Bruner (1964), quella delle celebre terna dei modi di rappresentazione dei concetti:

- *esecutiva*
- *iconica*
- *simbolica*

che, per inciso, si riferiva proprio alla matematica.
Facciamo un esempio celeberrimo: l'acquisizione del concetto di misura da parte dei bambini di età 3-5 anni; e contrapponiamo le modalità di Piaget a quelle di un famoso appartenente alla scuola sovietica: Gal'perin.

■ Nella descrizione che fanno Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) dell'apprendimento spontaneo del concetto di misura, al bambino si propongono situazioni empiriche in cui si richiede di misurare, fino ad arrivare ad un concetto astratto, rispettando la teoria degli stadi evolutivi. Il comportamento del bambino seguirebbe un famoso *iter*, molto diffuso ancora oggi nella scuola dell'infanzia e nel primo ciclo della scuola elementare italiana: misure spontanee con pseudo-unità di misura, predominanza dell'attività percettiva; scelta più accurata dell'unità di misura, capacità di riportare più volte l'unità; consapevolezza della conservazione delle grandezze (e delle misure). Come si vede: abbondanza di terminologia tipicamente piagettiana.

■ La prova di Gal'perin (1969) lega di più la misurazione all'idea di numero anche basandosi su idee fondazionali di A. N. Kolmogorov. La prima tappa è di giungere all'idea di unità; poi al fatto che la misura rispetto ad una data unità è un numero che può essere ricordato anche senza saperne il nome, semplicemente mettendo da parte un bastoncino o un bottone ogniqualvolta un'unità è usata; a quel punto la misura viene fatta coincidere con il numero di volte in cui l'unità è stata usata (l'esempio proposto è: riempire una brocca con dei bicchieri d'acqua per valutarne la capacità); per finire, riconoscimento ed accettazione della relatività del numero-misura, rispetto alla unità usata.
Mi pare che tutto ciò spieghi bene qual è l'accanimento e l'interesse con il quale i più famosi teorici dell'apprendimento concettuale si siano interessati a questo tema; e continua a spiegarci sempre più, almeno implicitamente, che cosa essi intendano per *concetto*, almeno in àmbito di apprendimento cognitivo.

3. I concetti nei processi di insegnamento ed apprendimento.

Si *devono* insegnare i concetti? Si *possono* apprendere i concetti? Più ancora: hanno senso queste stesse domande?

Sono, le precedenti, questioni cardine sulle quali occorre riflettere e che troppo sbrigativamente ed ingenuamente alcuni Autori trattano.
Questa problematica si è sviluppata attorno agli anni '60, soprattutto nei paesi di lingua anglosassone, nel vastissimo movimento internazionale di rinnovamento dei curricoli che ha toccato tutto il mondo. Ciò è stato indotto certamente dalla grande rivalutazione educativa dei contenuti delle varie discipline ed in particolare delle scienze e specificamente della matematica. In questo senso, certamente un artefice della svolta mondiale è stato J. Bruner.[4] Ciò portò di conseguenza un profondo dibattito sul curriculo soprattutto relativo proprio al settore delle scienze in generale e della matematica in particolare.
Lo riassumo di seguito, cominciando da questa domanda, preliminare alle precedenti: a *che cosa* si deve educare, quando a scuola si fa scienza? Vi sono due risposte possibili:

- al *metodo scientifico*: l'obiettivo è di dare padronanza nella metodologia
- all'acquisizione e padronanza dei *concetti essenziali* della scienza.

Il dibattito non era nuovo; la prima risposta si può certamente ricollegare al *metodo dell'intelligenza* di John Dewey (1933), ma gli anni '60 furono testimoni di un dibattito di fuoco all'interno del quale ebbero vita facile tutti coloro che propugnarono idee didattiche abbastanza ben congegnate.[5]
In questo dibattito, ben si inserisce un altro tipo di proposta, quella di Gagné (1965-1985) che tende a separare la didattica dei concetti *concreti* da quella degli *astratti*; la concretezza e l'astrazione vanno viste in relazione alla qualità di riferimento degli oggetti considerati nei concetti:

- se si tratta di concetti derivati dall'osservazione empirica di oggetti, si tratta di concetti concreti;
- se si tratta di concetti derivati da definizioni e che implicano dunque relazioni astratte, si tratta di concetti astratti.

Gagné elabora una teoria delle gerarchie di apprendimento in cima alla quale, come ultimo punto, culminante, ci sono i concetti astratti.
Questa idea delle gerarchie spinse molti altri Autori ad ideare gerarchie simili, seguendo altri parametri; in particolare sto pensando ai lavori di Klausmeier, Gathala e Frayer (1974) e Klausmeier (1979, 1980) che dividono l'apprendimento dei concetti nella scuola primaria in 4 livelli:

- livello concreto: il bambino riconosce un oggetto già visto, nella stessa situazione
- livello di identità: il bambino riconosce un oggetto già visto, ma in condizioni diverse
- livello di classificazione: il bambino riconosce che due cose sono simili per un certo aspetto e, generalizzando, le classifica insieme anche se non sono chiari i criteri della classificazione

[4] Per capire il perché, si veda Tornatore (1974), cap. 9.
[5] Sul dibattito, ma molto di più, si può vedere Pontecorvo (1983, pagg. 262-263).

- livello formale: il bambino sa dare un nome alla classe ottenuta nel terzo livello, cioè al concetto selezionato dagli attributi che gli hanno permesso la classificazione.[6]

Sembra dunque che lo studio di come si sviluppino i concetti riguardi soprattutto la fascia d'età 3-10 e che sia necessario intrecciare questa ricerca con quella didattica.
Quindi: sviluppo dei concetti ed apprendimento sono molto legati tra loro.
Si può arrivare a pensare che punto culminante dell'ontogenesi sia l'organizzazione della conoscenza per categorie? Secondo Luria (1982) sì, ed i metodi utilizzati in questo senso, a suo avviso, sono i seguenti:

- metodo della definizione del concetto: si chiede di rispondere in modo spontaneo e libero a domande del tipo: «Che cosa è?»; le risposte possono essere specifiche, riferite cioè a particolarità, o di tipo categoriale
- metodo della comparazione - differenziazione: dati due oggetti diversi ma con qualche differenza comune, si richiede di dire quali siano le caratteristiche comuni e le differenze
- metodo della classificazione: si danno più oggetti e si chiede di classificarne un sottoinsieme, formato da quegli oggetti aventi una caratteristica comune
- metodo della formazione dei concetti artificiali: si torna a Vygotskij; lo sperimentatore ha preordinato tutto per giungere ad un ben stabilito concetto cui si voleva pervenire.

Va tuttavia detto che non si può non essere d'accordo con Cornu e Vergnioux (1992, pagg. 55-56) quando affermano: «L'apprendimento di un concetto isolato è impossibile, dato che ogni concetto è correlato, collegato, ad altri. Si deve parlare allora di trame concettuali». Su questo punto dovremo tornare tra breve (e rinvio a D'Amore, 1999).

4. Il ruolo del linguaggio nell'apprendimento e nella formulazione dei concetti.

In tutto ciò, è evidente, gioca un ruolo di straordinaria importanza il linguaggio.
È ben noto che nella posizione di Piaget si è andati sempre più verso «una progressiva svalutazione cognitiva del linguaggio» (Pontecorvo, 1983, pag. 292); esso «va visto in relazione con la presa di posizione di Piaget contro ogni concezione che vede nella comunicazione sociale tramite il linguaggio l'origine

[6] Maggiori chiarificazioni, legami tra i livelli di Klausmeier, le fasi di Gagné e gli stadi di Piaget, nonché esemplificazioni di applicazioni didattiche, possono essere rintracciate in Pontecorvo (1983).

del pensiero e contro ogni concezione che assimili i sistemi logici a sistemi linguistici (...) Il pensiero, insiste Piaget, non ha origine dal linguaggio (...) la "struttura" di un sistema operatorio non è struttura di un sistema di segni, ma struttura di un sistema di "azioni interiorizzate"» (Tornatore, 1974, pag. 137).
Ecco perché Piaget assume la seguente posizione:

- l'immagine è un significante il cui scopo è di designare oggetti figurativamente;
- il concetto è un significato che ha come funzione di individuare caratteri costitutivi dell'oggetto rispetto ad altri termini della stessa classe (e non di nominarlo);
- la parola, segno verbale che designa il concetto, nulla aggiunge, quanto a conoscenza, al concetto stesso.

Ben diversa è la posizione di Vygotskij (1962) che invece vede il linguaggio come mediatore tra individuo e cultura; egli asserisce che la formazione di un concetto avviene con un'operazione intellettuale che è «guidata dall'uso delle parole che servono per concentrare attivamente l'attenzione, astrarre certi concetti, sintetizzarli e simbolizzarli per mezzo di un segno» (pag. 106, I ed, it.).
L'organizzazione cognitiva del bambino riceve dunque, grazie al linguaggio, una dimensione che gli è propria, connaturata fin dal suo esordio: la dimensione *sociale*. Se è vero che il bambino impara a categorizzare nel rapporto linguistico con l'adulto, è però anche vero che forme embrionali di categorizzazione devono già essere presenti *prima* della sistemazione definitiva adulta di esse. Vygotskij stabilisce allora un confronto tra concetti spontanei (o quotidiani) e concetti scientifici:

- i primi hanno la caratteristica di essere relativi all'esperienza personale,
- i secondi fanno già parte di un sistema di concetti. La scuola ha, come effetto sulle competenze del bambino, di dare una sistematicità ai concetti che egli già possiede e che man mano acquisisce.

Una posizione davvero rivoluzionaria, quella sulla quale si fonda gran parte della didattica odierna.
Voglio chiudere questa rapidissima carrellata su linguaggio ed apprendimento dei concetti, ricordando, fra i tanti altri possibili, gli studi della Nelson (1974, 1977). Come ho già messo in evidenza, il concetto, almeno dal punto di vista dell'apprendimento cognitivo, è interpretato oggi come qualche cosa di sempre più vasto, non più esclusivamente legato alle categorie, alle classi eccetera; concetto è, per la Nelson (1977), correlato ad un'acquisizione di conoscenza qualsiasi, purché questa sia «definita e incorporata in un contesto o in un sistema». Dunque, indipendentemente dal grado di generalità o di astrazione, quel che conta è che ci sia un quadro di riferimento, una rete di relazioni: «i concetti necessariamente esistono all'interno di un *framework* concettuale» (Nelson, 1977).
Diventa allora decisiva per l'apprendimento di un concetto una mappa di conoscenze riferite, per esempio, ad un oggetto. L'esempio proposto dalla stessa

Autrice è relativo al termine "palla" in un'esperienza con un bambino di 12 mesi: la rete di relazioni che ruota attorno alla parola "palla" è relativa al luogo dove è stata vista, all'attività che altre persone fanno con essa, che il bambino stesso può fare con essa, a quali siano le caratteristiche funzionali dell'oggetto, i luoghi nei quali tutto questo può accadere eccetera. L'oggetto quindi è legato a tutta una rete relazionale, il cui complesso finisce con il costituire il concetto; e, come si è visto, la *parola* ha un ruolo decisivo. Con il passare del tempo, il bambino aggiungerà, a questa prima formazione del concetto, altri attributi, altre funzioni eccetera, di modo che il concetto potrà contenere elementi funzionali, relazionali, percettivi, *descrittivi*, fino al termine che lo designa, sia individualmente sia collettivamente. È anche ovvio che qui c'è un legame fortissimo con gli *script*, pensati come quadri di riferimento più ampi all'interno dei quali collocare e situare questi concetti nelle varie fasi in cui si evolvono e si presentano. Tutto ciò permette di riconoscere i tratti identificativi del concetto, in modo da poter poi riconoscere nuovi esemplari che possono con il precedente condividere il *nome*.
Ma il punto finale è quello in cui, nonostante *script* diversi, il soggetto riesce, come si usa dire, a supercategorizzare: «Sia le categorie sia gli *script* possono offrire quadri di riferimento per gli stessi concetti: infatti, non c'è ragione per cui concetti inseriti nell'uno o nell'altro contesto siano diversi nel contenuto o nella struttura. Ad esempio: gli orsi possono essere parte dello *script* relativo allo zoo o essere parte di una categoria tassonomica relativa agli animali» (Nelson, 1977, pag. 223).
Si pensi a come queste riflessioni siano sotto gli occhi di tutti nell'attività di didattica della Matematica, quando lo stesso concetto, introdotto in un particolare *script*, non viene accettato quando lo si ritrova in una categoria distinta.
Che cos'è che rende difficile la comprensione dei concetti? Qual è il livello in cui ci sono difficoltà di comprensione dei concetti?
Vi sono molteplici risposte. Intanto i diversi livelli di formazione dei concetti; studi su questo punto sono più frequenti nel mondo della didattica delle scienze naturali (Giordan, De Vecchi, 1987; Astolfi, Develay, 1989) e della storia (Clary, Genin, 1991). E poi l'esistenza di obiettivi-ostacolo (Meirieu, 1987; Astolfi, Develay, 1989).

5. Le definizioni di concetto e di schema date da Vergnaud.

Gérard Vergnaud, in molteplici occasioni, ha affrontato la problematica di distinguere e definire le idee di concetto e di schema. Dopo aver dichiarato che la conoscenza razionale deve essere di tipo operatorio, definisce schema

«l'organizzazione invariante del comportamento per una classe di situazioni date» (Vergnaud, 1990).
In particolare, molti dei suoi esempi sono tratti dall'àmbito della matematica:

- la numerazione di una piccola collezione di oggetti da parte di un bambino di 5 anni, necessita dell'applicazione di uno schema che gli permette di coordinare movimenti di occhi e mani e di coordinare con essi la sequenza numerica; in particolare c'è la costante significativa di un comportamento di tipo schematico nella ripetizione dell'ultimo nome numerale, pronunciato con tono diverso
- la risoluzione di equazioni lineari da parte di adolescenti a suo avviso segue uno schema, un'organizzazione invariante
- l'esecuzione dell'addizione in colonna di numeri naturali segue uno schema già assunto

eccetera.
Secondo Vergnaud, se si analizza criticamente la difficoltà di allievi nella risoluzione di compiti di matematica, per esempio di bambini alle prese con problemi di aritmetica, è in termini di *schemi* che occorre analizzare la scelta dei dati da usare, la scelta delle operazioni, specie quando vi siano più possibili scelte. Anche le procedure euristiche sarebbero nient'altro che schemi.
Egli introduce, a questo punto, l'idea di "concetto-in-atto" e di "teorema-in-atto"; si tratta delle conoscenze contenute negli schemi: si possono pure designare con l'espressione più comprensiva di "invarianti operatorî"».
Secondo Vergnaud vi sono tre tipi logici di invariante operatorio:

- invarianti del tipo *proposizione*, quelli ai quali s'addice l'attribuzione di essere veri o falsi;
- invarianti del tipo *funzione proposizionale*; con questo possiamo intendere un'espressione che contiene una o più variabili individuali tali che, quando al posto di queste si mettono costanti individuali, dà luogo ad una proposizione;
- invarianti del tipo *argomento*: possono essere oggetti, relazioni, proposizioni, funzioni proposizionali, o altro: si tratta sostanzialmente di istanziazioni di variabili o esempi di funzioni proposizionali, o proposizioni stesse.

E torniamo ai concetti. Secondo Vergnaud, il punto decisivo nella concettualizzazione del reale e nella didattica è il passaggio dai *concetti-come-strumento* ai *concetti-come-oggetto* ed una operazione linguistica essenziale in questa trasformazione è proprio la nominalizzazione. Ciò si potrebbe riassumente in una sola parola: *concettualizzazione*.
È allora fondamentale, irrinunciabile, dare una definizione pertinente ed efficace di *concetto*; in più opere, pur con piccolissime variazioni, Vergnaud ne suggerisce una che possiamo illustrare come segue:
un concetto è una terna di insiemi:
$C = (S, I, \mathcal{S})$
dove:

- S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *referente*)

- I è l’insieme degli invarianti sui quali si basa l’operatività degli schemi (il *significato*)
- *S* è l’insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il *significante*).

Secondo Vergnaud, studiare come si sviluppa e come funziona un concetto significa considerare di volta in volta questi tre “piani” separatamente ed in mutua relazione reciproca.

6. La svolta “antropologica”: significato istituzionale e personale degli oggetti matematici.

Già a partire dagli anni ’70, però, le domande sulla natura cognitiva dei concetti matematici e del significato degli oggetti matematici presero tutt’altra direzione.
«Una teoria del significato è una teoria della comprensione; cioè: quello di cui una teoria del significato deve rendere conto è ciò che si conosce quando si conosce il linguaggio, cioè quando si conoscono i significati delle espressioni e dei discorsi del linguaggio», dichiarava Dummet nel 1975 (Dummett, 1991).
Pochi anni dopo, «Quali sono le componenti del significato deducibili dal comportamento matematico che si osserva nell’allievo? Quali sono le condizioni che portano alla riproduzione di un comportamento mantenendo lo stesso significato?», si chiedeva Brousseau nel 1980 (Brousseau, 1981). Non sarà, per caso, che esista una “varietà didattica” del concetto di senso, specifica per la matematica, mai studiata, mai evidenziata finora, in linguistica o in psicologia? (Brousseau, 1986).
L’accentuazione del bisogno di studi sui concetti centrati sui processi di apprendimento è fatta anche da Sierpinska (1990): «Comprendere il concetto sarà (…) concepito come l’atto di acquisire il suo significato. Tale atto sarà probabilmente un atto di generalizzazione e sintesi di significati in relazione con elementi particolari della 'struttura' del concetto (la 'struttura' del concetto è la rete di significati degli enunciati che abbiamo considerato). Questi significati particolari devono essere acquisiti con atti di comprensione. (...) La metodologia degli atti di comprensione si preoccupa principalmente del processo di costruire il significato dei concetti».
Siamo di fronte alla necessità di far luce sulla natura del significato, confrontando due categorie distinte nelle quali le teorie possono essere divise: teorie realiste (o figurative) e pragmatiche (divisione già apparsa in Kutschera, 1979).

Nelle teorie realiste il significato è «una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongono un realismo concettuale» (Godino, Batanero, 1994). Come già asseriva Kutschera (1979), «Secondo questa concezione il significato di un'espressione linguistica non dipende dal suo uso in situazioni concrete, bensì avviene che l'uso si regga sul significato, essendo possibile una divisione netta fra semantica e pragmatica».
Nella semantica realista che ne deriva, si attribuiscono alle espressioni linguistiche funzioni puramente semantiche: il significato di un nome proprio (come 'Bertrand Russell') è l'oggetto che tale nome proprio indica (in tal caso Bertrand Russell); gli enunciati atomici (come 'A è un fiume') esprimono fatti che descrivono la realtà (in tal caso A è davvero il nome di un fiume); i predicati binari (come 'A legge B') designano attributi, quelli indicati dalla frase che li esprime (in questo caso la persona A legge la cosa B). Dunque, ogni espressione linguistica è un attributo di certe entità: la relazione nominale che ne deriva è l'unica funzione semantica delle espressioni.
Si riconoscono qui le posizioni di Frege, di Carnap, del Wittgenstein del *Tractatus*.
Una conseguenza di questa posizione è l'ammissione di una osservazione scientifica (all'un tempo dunque empirica e oggettiva o intersoggettiva) come potrebbe essere, ad un primo livello, una logica degli enunciati e dei predicati.
Dal punto di vista che a noi qui preme di più, se andiamo ad applicare i supposti ontologici della semantica realista alla Matematica, se ne trae necessariamente una visione platonica degli oggetti matematici: in essa nozioni, strutture etc. hanno una reale esistenza che non dipende dall'essere umano, in quanto sono appartenenti ad un dominio ideale; "conoscere" da un punto di vista matematico significa scoprire enti e loro relazioni in tale dominio. Ed è pure ovvio che tale visione comporta un assolutismo della conoscenza matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non modificabili dall'esperienza umana, dato che sono ad esse precedenti o, almeno, ad esse estranee e da ese indipendenti. Posizioni di questo tipo, seppure con diverse sfumature, furono sostenute da Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel, …; e trovarono violente critiche [il convenzionalismo di Wittgentsein ed il quasi empiricismo di Lakatos: si vedano Ernest (1991) e Speranza (1997)].

Nelle teorie pragmatiche le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazioni scientifica in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può far altro che esaminare i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti.
Si riconoscono qui le posizioni del Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*, quando ammette che la significatività di una parola dipende dalla sua funzione

in un “gioco linguistico”, dato che in esso ha un modo d’ ‘uso’ ed un fine concreto per il quale essa è stata appunto usata: la parola, dunque, non ha di per sé un significato, e tuttavia può essere significativa.
Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. Di fatto, gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti dipendono dai problemi che in matematica si affrontano e dai processi della loro risoluzione.

	TEORIE “REALISTE”	TEORIE “PRAGMATICHE”
significato	relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali, indipendenti dai segni linguistici	dipende dal contesto e dall’uso
semantica vs pragmatica	divisione netta	non divisione o divisione sfumata
obiettività o intersoggettività	totale	mancante o discutibile
semantica	le espressioni linguistiche hanno funzioni puramente semantiche	le espressioni linguistiche e le parole hanno significati “personali”, sono significative in opportuni contesti, ma non hanno significati assoluti, di per sé
analisi	possibile e lecita: la logica, per esempio	possibile solo un’analisi “personale” o soggettiva, non generalizzabile, non assoluta
conseguente visione epistemologica	concezione platonica degli oggetti matematici	concezione problematica degli oggetti matematici
conoscere	scoprire	usare in opportuni contesti
conoscenza	è un assoluto	è relativa alla circostanza ed all’uso specifico
esempi	il Wittgenstein del *Tractatus*, Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel]	il Wittgenstein delle *Ricerche Filosofiche* [Lakatos]

Nella direzione pragmatista, si capisce la definizione di Chevallard (1991) di oggetto matematico: un oggetto matematico è «un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli, …), vale a dire, registro della scrittura»; essendo il "praxema" un oggetto materiale legato alla prassi, l'oggetto è allora un «emergente da un sistema di praxema». In questa accezione, non ha più molto interesse la nozione di significato di un oggetto quanto piuttosto quella di *rapport à l'objet*, rapporto, relazione all'oggetto. Su tale idea poggia la costruzione che Chevallard fa della sua "teoria della conoscenza", o meglio di una sua "antropologia cognitiva", all'interno della quale si può situare la didattica.
Ma allora è centrale la persona (o l'istituzione, come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto, e non l'oggetto in sé: «Un oggetto esiste dal momento in cui una persona *X* (o una istituzione *I*) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per *X* (rispettivamente per *I*) se esiste un oggetto, rappresentato da R(*X*,O) (rispettivamente R(*I*,O)) e detto relazione personale da *X* ad O (rispettivamente relazione istituzionale da *I* ad O)» (Chevallard, 1992).
Questa posizione ha segnato una svolta interessante all'interno delle cornici teoriche nelle quali si situa ogni ricerca in Didattica della Matematica, tanto più se si sottolineano i successivi studi compiuti da più Autori, per chiarire e rendere operative le nozioni di Chevallard, creando strumenti concettuali adeguati e paragonandoli a quelli messi in campo da altre posizioni al riguardo.
Per esempio, una chiarezza esemplare proviene dagli studi di Godino e Batanero (1994) perché in essi si definiscono in maniera rigorosa tutti i termini della questione: che cosa significa "pratica", che cosa è una "pratica personale", che cosa è un'istituzione, che cosa una pratica istituzionale, che differenza c'è tra oggetti personali ed istituzionali e come si definisce ciascuno di essi, che cosa sono i significati di un oggetto personale e di un oggetto istituzionale, che legami ci sono tra significato e comprensione, …
Per voler dare, in un colpo solo, una caratteristica di tale posizione, nella formulazione di Chevallard-Godino-Batanero l'essenziale è l'attività delle persone messe di fronte alla risoluzione di campi di problemi (fenomenologie), dalla quale emergono gli oggetti (concetti, termini, enunciati, relazioni, teorie etc.), i quali sono relativi ai contesti istituzionali e personali. Tali contesti restano definiti secondo i campi di problemi che si hanno di fronte e gli strumenti semiotici disponibili.
Tra breve dovrò tornare su questa posizione, con esempi significativi.
Ancora una nota. Per spiegare l'enfasi con la quale si trattano i fenomeni tipici della cognizione umana nel lavoro di Godino e Batanero (1994), è bene evidenziare che, mentre nel testo di Chevallard (1992) si dà maggior peso al

contesto istituzionale rispetto al personale, Godino e Batanero tendono a privilegiare la "sfera del mentale", del soggetto umano, per tentare un equilibrio tra i due contesti e per evitare che la sfera del personale sia occultata dal campo istituzionale.

7. Alcune precisazioni, prima di proseguire.[7]

In questo paragrafo, mi farò alcune precisazioni terminologiche, considerazioni complementari e note cautelative.

7.1. A volte, in matematica, si parla di "concetti" a volta di "oggetti". Che differenza c'è? Potrebbe essere il risultato di un vezzo dei matematici, ma si tratta invece di un motivo ben fondato, dato che si basa sui seguenti tre punti:

- ogni concetto matematico ha rinvii a "non-oggetti", dal punto di vista del realismo ingenuo; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta dato che, in matematica, non sono possibili rinvii ostensivi;
- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione;[8] dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci: dunque, in matematica, non c'è accesso sensibile (vista, tatto, …) diretto agli "oggetti" ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri linguistici;
- si parla più spesso in matematica di "oggetti matematici" che non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano *preferibilmente* oggetti piuttosto che concetti: «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998).

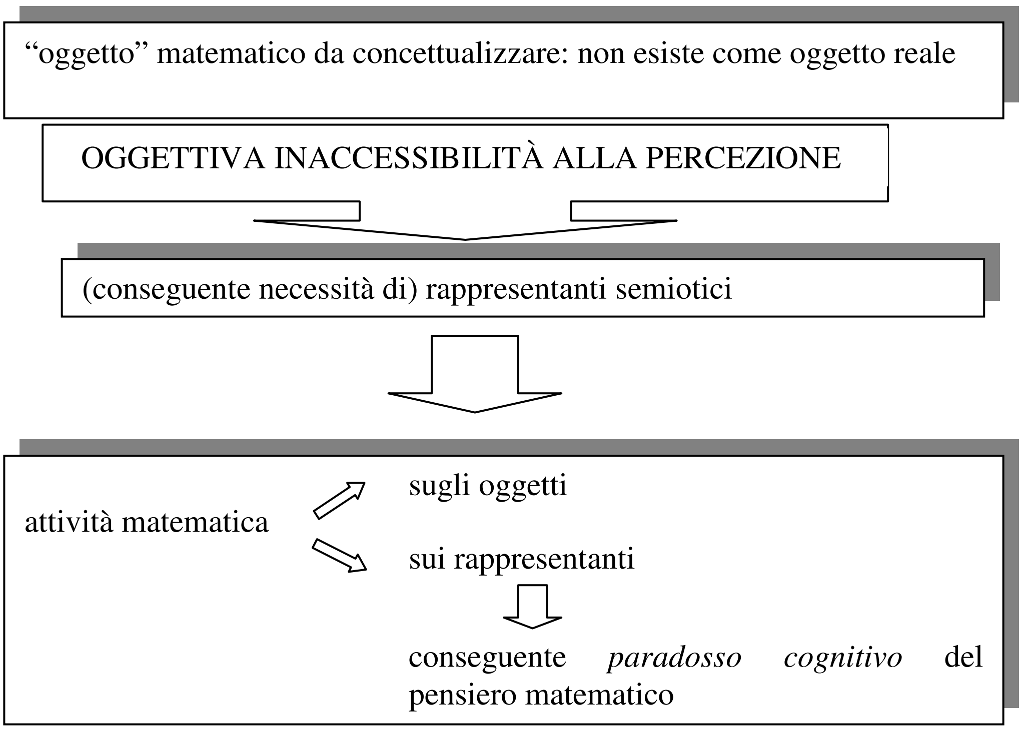
7.2. Nel sentiero tracciato da Duval, la nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli Autori, diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno*, *oggetto*), il che porta al cosiddetto *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, evidenziato proprio da

[7] Per la redazione di questo paragrafo mi servo di D'Amore (*).

[8] Qui "oggetto" è ingenuamente inteso nel senso di "oggetto reale" o di "cosa". Quale sia il significato di questa parola ("cosa") è espresso nella *Metafisica* di Aristotele, quando afferma che la "cosa", in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti: tridimensionalità; accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi contemporaneamente) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche; possibilità di separazione materiale e da altre parti della realtà, da altre "cose".

Duval (1993)[9] e che io presenterò tra breve. In Duval (1996) si cita un passo di Vygotskij nel quale sostanzialmente si dichiara che non c'è concetto senza segno: «Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l'impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici… L'elemento centrale [del processo di formazione dei concetti] è l'uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all'adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici…» (Vygotskij, 1962; nell'ed. francese, 1985, alle pagg. 150, 151, 157).
È ovvio che, se si pone l'accento sulla coppia (*segno*, *oggetto*), tutte le rappresentazioni triadiche (di C.S. Peirce, di G. Frege, di C.K. Ogden e I.A. Richards) cadono in difetto.[10]

7.3. Riassumo parte di quanto già detto, interpretando Duval (1993), nel seguente schema (sottoposto all'accettazione da parte dall'Autore):



Vediamo allora in che cosa consiste questo *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, che ha forti ripercussioni cognitive (Duval, 1993, pag. 38; la traduzione è mia, concordata con l'Autore): «(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un'apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile

[9] Ma i primi lavori di Duval su questo argomento sono del 1988 (Duval, 1988 a, b, c).
[10] Si veda D'Amore (*) per una trattazione più completa.

un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche».
In questo paradosso, così ben evidenziato da Raymond Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni, come tento di provare in D'Amore (*). Il problema principale, per dirla qui brevemente, sta nel fatto che secondo l'insegnante, secondo la noosfera e secondo lo stesso studente, egli (studente) sta entrando in contatto con un "oggetto" matematico ma, di fatto, e nessuno talvolta sembra rendersene conto, lo studente sta entrando a contatto solo con una rappresentazione semiotica particolare di quell' "oggetto". Lo studente non ha, non può avere, accesso diretto all' "oggetto" e l'insegnante e la noosfera tendono a non separare oggetto e sua rappresentazione; lo studente è come bloccato, come inibito: non può far null'altro che confondere "oggetto" e sua rappresentazione semiotica perché non se ne rende conto, non lo sa. Il suo rapporto personale al sapere ha come "oggetto" qualche cosa di sfumato, di confuso. E quindi, di fronte ad un successivo bisogno concettuale, che si manifesta per esempio con la necessità di modificare la rappresentazione semiotica di quello stesso "oggetto", lo studente non ha mezzi critici né culturali né cognitivi; l'insegnante e la noosfera non capiscono il perché ed accusano lo studente, colpevolizzandolo di qualche cosa che egli non capisce, lo accusano di una incapacità vaga, non circostanziata e dettagliata: nessuno sa *esattamente* che cosa, davvero, lo studente non sa e non sa fare.

8. Il concetto (o oggetto) in matematica, come superposizione o come accumulazione di concezioni provvisorie.

Tenterò qui una convergenza tra:
(a) una posizione squisitamente didattica-cognitiva, a carattere fortemente ingenuo, che accolga come ipotesi di base il costruttivimo della conoscenza più elementare, posizione basata sulle concezioni acritiche più diffuse;

(b) una posizione antropologica nella quale tutto è riferito al rapporto personale all'oggetto matematico. Tutto ciò nell'àmbito di una teoria dell'apprendimento matematico che non sia caratterizata da alcuna forma di preconcetto teorico o ontologico.

Questo paragrafo **8.** è solo un tentativo di prima mediazione tra le posizioni più ingenue, ma radicate nel senso comune, e quanto fin qui esposto.

Nella paragrafo **9.** farò alcune considerazioni critiche.

Siano c_i le concezioni provvisorie, in un processo lineare ed evolutivo (almeno nel tempo) di assimilazione ed accomodamento, relativamente ad un oggetto matematico C. Occorre distinguere tra:

- c_i scientifiche di tipo istituzionale, che diremo accademiche (a), cioè quelle che la comunità scientifica (accademica) accetta come pertinenti, significative e corrette; si tratta di R(*I*(C)) condivisi; le chiameremo c_i di tipo a;
- c_i cognitive di tipo istituzionale, che diremo scolastiche (s), dovute all'azione della scuola ed alla noosfera, cioè quelle che una persona costruisce o ha costruito a scuola; si tratta di R(*X*(C)) che possono essere anche non condivise; le chiameremo c_i di tipo s.

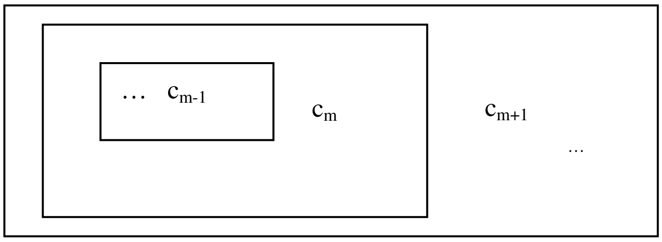
Le c_i di tipo a si differenziano da quelle di tipo s solo perché le seconde sono o più in ritardo rispetto alle prime (cioè: gli indici deponenti sono di valore numerico inferiore), oppure perché sono criticamente meno ricche e più basate su sensazioni, sul buon senso, legate ad applicazioni, meno soggette a ripensamento e riflessione critica, più legate a varie clausole del contratto didattico.

Il senso del processo didattico usuale, nella sua forma più ingenua, ma anche più diffusa, è di portare alla fine gli individui alla formazione di un concetto C che sia il culmine del processo evolutivo, ***il*** concetto, supposto esistente, di tipo a (o, per lo meno, il più vicino possibile ad esso).

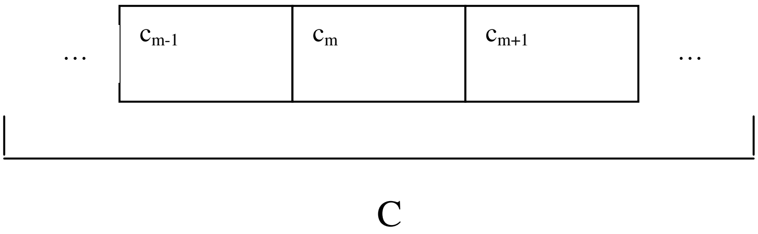
Siccome però ogni concezione è in evoluzione storico-critica *perenne*, è impossibile valutare il raggiungimento di questo limite, soprattutto perché si potrà al più parlare di «oggetto acquisito dalla comunità scientifica fino ad ora» e non porsi nella situazione di dover prevedere il futuro di quell'oggetto. L' "oggetto" è quindi, in questa concezione, qualche cosa di ideale, di astratto, punto culminante di un processo perennemente in atto, del quale abbiamo solo un'idea limitata all'evoluzione storica ed allo stato attuale.

La formazione di C a partire dalla successione c_i può essere pensata secondo due modalità:

■ <u>superposizione</u>: ogni concezione provvisoria c_{m+1} aggiunge ed integra la precedente c_m, cioè la comprende e le aggiunge qualcosa, sovrapponendosi ad essa:



■ <u>accumulazione</u>: ogni concezione provvisoria c_{m+1} aggiunge qualcosa (in più) alla c_m precedente:



In realtà, si hanno spesso (sempre ?) miscugli delle due modalità.

ESEMPIO 1: lo pseudo-oggetto *retta*.
Delineo, in maniera approssimativa, una successione di concezioni provvisorie relativamente ad un supposto oggetto *retta*. Nella sua lunga storia evolutiva, si potrebbe pensare ad una successione siffatta:
c_1: retta primitiva: segmento (le sue caratteristiche sono: l'esser dritto e sottile, e la sua indipendenza nominale dalla lunghezza); questa è l'idea ingenua di un bambino
c_2: retta euclidea: idealizzazione di c_1 [le sue caratteristiche sono: l'aver una sola dimensione (che è l'idealizzazione del "sottile") e l'essere allungabile (che è l'idealizzazione dell'indipendenza del nome dalla lunghezza)]; non molto chiara è la relazione tra punti e retta; nel senso pitagorico, il modello è quello delle perline (monadi) infilate nella collana (retta); ma in Euclide non c'è già più questa posizione ingenua
c_3: retta densa: idealizzazione di c_2: tra due punti ce n'è *sempre* un altro: il modello pitagorico è superato
c_4: retta continua (già ai tempi di Newton e Leibniz): sulla retta ci sono opportune sedi per punti corrispondenti a valori irrazionali ($\sqrt{2}$) e trascendenti (π) anche se non è ancora ben chiaro il loro statuto epistemologico
c_5: retta di Hilbert (definita implicitamente dagli assiomi): non c'è più il tentativo di definizione esplicita per cercare di adeguare l'immagine di retta ad

un modello pre-fissato che si vuol raggiungere, ma si ha una idealizzazione della concezione all'interno di un sistema teorico
c_6: retta come nome comune utilizzato indifferentemente in àmbito euclideo e non: non si parla più di dimensione, di essere diritta, di essere infinita (ma illimitata sempre)
c_7: denominazione di retta data ad enti diversi di modelli diversi (retta finita o infinita, discreta, densa o continua, limitata o illimitata…)
c_8: oggetto n-2 dimensionale in una varietà n-dimensionale
…
Come si può decidere se e quali ulteriori c_i seguiranno? Lo pseudo-oggetto C "retta" è sovrapposizione o accumulazione delle concezioni precedenti; sembra che da c_1 a c_5 si possa parlare prevalentemente di passaggi di tipo "sovrapposizione", mentre da c_6 a c_8 sembra di essere di fronte prevalentemente a passaggi di tipo "accumulazione".

ESEMPIO 2: lo pseudo-oggetto *addizione*.
Delineo, in maniera approssimativa, una successione di concezioni provvisorie relativamente al supposto oggetto *addizione*. Nella sua lunga storia evolutiva, si potrebbe pensare ad una successione siffatta:
c_1: addizione pitagorica (ordinale e cardinale confusi insieme) in N-{0}; l'addizione come cardinale di raccolte disgiunte; è la concezione ingenua di un bambino piccolo (è su questo punto che Vergnaud spiega alcuni dei suoi *teoremi in atto*)
c_2: addizione in Q_a; sto pensando alle addizioni fra frazioni, nella storia sumera, egizia e poi greca
c_3: addizione in N ed in Q_a (0 compreso); nel corso del Medioevo, nel mondo indiano-arabo si rende necessario ampliare l'addizione a casi nei quali un addendo è lo zero
c_4: addizione in Z
c_5: addizione in Q
c_6: addizione in R
c_7: addizione nel campo complesso C
c_8: addizione nei quaternioni e, più in generale, nei sistemi complessi n-valenti; sto pensando alle ricerche di Hamilton, Grassmann, Frobenius ed Hankel; alcune proprietà formali dell'addizione tipiche dei numeri N, Z, Q, R e C si perdono, e tuttavia l'operazione che estende e generalizza l'addizione è ancora chiamata così
c_9: addizione generalizzata nei reticoli e nelle algebre di Boole
c_{10}: addizione generalizzata nelle strutture $<A,+,\times, 0, 1,...>$
…
Come si può decidere se e quali ulteriori c_i seguiranno? Lo pseudo-oggetto C "addizione" è sovrapposizione o accumulazione delle concezioni precedenti;

sembra che da c_1 a c_7 si possa parlare di passaggi prevalentemente di tipo "sovrapposizione", mentre da c_8 a c_{10} sembra di essere di fronte a passaggi prevalentemente di tipo "accumulazione".

9. Critiche alla precedente posizione.

La visione delineata nel paragrafo **8.**, come ripeto, è solo uno schema che riassume le posizioni più ingenue, ma anche le più diffuse, al riguardo. Vediamo ora alcune note fortemente critiche.

In ogni caso, una riflessione matura mostra che è essenziale l'attività delle singole persone messe di fronte alle problematiche che fanno scaturire dei c_i; in questo senso, una supposta scala gerarchica perde, a mio avviso, di senso; per cui una maggior … nobiltà concettuale supposta per le c_i di tipo a, rispetto a quelle di tipo s, svanisce.[11] Gli "oggetti" emergono dall'attività delle persone messe di fronte alla soluzione di problemi, addirittura indipendentemente da ogni contesto istituzionale; anzi, in un certo senso, privilegiando proprio i significati personali rispetto a quelli istituzionali.
Da questo punto di vista, non sembra aver senso parlare, per esempio, dell' "oggetto retta" (o dell' "idea di retta", o del "concetto di retta") come normalmente si fa: siamo evidentemente piuttosto costretti a parlare di "pluralità di oggetti"; non tanto dunque si tratta di una "scalata" verso un vertice, quanto di una pluralità di "oggetti" *diversi*, che hanno banalmente in comune un nome proprio, il quale però non identifica una sola entità, come nella visione che abbiamo chiamato "teoria realista", bensì il cui significato dipende dal conteso di uso, nella visione che abbiamo chiamato "teoria pragmatica".
Dunque, ogni c_i è, in questa visione, un "oggetto retta" (probabilmente, ad una più accurata analisi, si potrebbe scoprire che, in realtà, esso stesso è, a sua volta, una pluralità…).
Ogni c_i è il risultato di un rapporto personale all'oggetto, ma, come abbiamo visto da Chevallard e da Godino-Batanero, *l'oggetto è questo stesso rapporto personale*, non un supposto "oggetto in sé".
D'altra parte, lo stesso Wittgenstein insiste sul fatto che non si deve parlare di idee matematiche nel senso in cui, invece, si è soliti farlo, cioè come del risultato di un processo di astrazione, dato che questo è origine di gravi

[11] Questo punto, se accettato, potrebbe avere forti rispercussioni nella pratica didattica; e, a mio avviso, dovrebbe essere studiato non solo dal punto di vista teorico, com'è stato fatto fino ad ora, nell'àmbito della cosiddetta Educazione Matematica, ma anche dal punto di vista della azione pratica, nell'àmbito della cosiddetta Didattica della Matematica (Godino, Batanero, 1998).

confusioni filosofiche, psicologiche [e didattiche, come mi suggerisce Juan Godino (in una lettera privata)]. Il Wittgenstein delle *Ricerche Filosofiche* insiste nel parlare di diversità di uso, o di usi diversi del "termine" ("retta", "addizione", nei miei esempi precedenti).
Nella posizione di Godino-Batanero, all'oggetto matematico Ox si propone di associare l'entità teorica "significato di Ox" (in realtà una classe di significati): si passa così dall'accentuazione posta sul "concetto", sulle sue definizioni e sulle regole d'uso, ad una nuova accentuazione posta invece sui campi di problemi, di pratiche, di tecniche, dalle quali emergono queste entità intensionali.
I due casi da me forniti, "retta" ed "addizione", dunque, costituiscono proprio un esempio della relatività degli oggetti Ox che, a volte sono entità mentali (dunque personali), a volte entità astratte (istituzionali). Non mi sono dilungato troppo nel chiarire e nel rimarcare questa distinzione, perché la reputo occasionale e scambievole…

Mi pare di poter affermare che negli studi teorici di Educazione Matematica, nella ricerca in questo settore, nella pratica didattica, sia di fondamentale importanza identificare quali siano i problemi specifici, le attività pratiche, le attività tecniche etc. che, anche storicamente, hanno portato a far emergere ogni "concezione", ogni "oggetto", ogni "regola"; così come ha somma importanza stabilire la sua reale o presunta dipendenza da contesti istituzionali (potrebbe aversi una ragione storica, o educativa, o strumentale etc., o tutte queste insieme).

Bibliografia.

Anderson R.C., Spiro R.J. & Montague W.E. (1977), *Schooling and the acquisition of knowledge*. Hillsdale N.J., Lea.
Astolfi J.-P. & Develay M. (1989), *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie*. Irem de Lyon, Lirdis.
Brousseau G. (1981), Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2, 1, 130-135.
Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.
Bruner J.S. (1964), The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19, 1-15.
Chevallard Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de*

l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.
Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique. Recherches en Didactique de la Mathématique, 12, 1, 73-112.
Clary M. & Genin C. (1991), *Enseigner l'histoire à l'école*? Paris, Hachette/Istra.
Cornu L. & Vergnioux A. (1992), *La didactique en questions*. Paris, Hachette.
D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.
D'Amore B. (*), Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution, *sottoposto ai referee per la stampa*.
Dewey J. (1933), *How we think*. Ediz. italiana: 1961. Firenze, La Nuova Italia.
Dummett A.A.E. (1991), ¿ Qué es una teoria del significado? In: Valdés L.M. (ed.), *La búsqueda del significado*. Madrid, Tecnos. [Si noti però che l'originale di questo lavoro è del 1975].
Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.
Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.
Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.
Duval R. (1993), Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
Duval R. (1998), Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.
Ernest P. (1991), *The philosophy of mathematics education*. London, Falmer Press.
Gagné R. (1965-1985), *The conditions of learning*. New York, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1965. Il libro è completamente cambiato nella sua impostazione, quando esce per i tipi di Cbs College Publishing, 1985.
Gal'perin P.Ja. (1969), Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino, in: Veggetti M.S. (ed.) (1977), 43-63. [L'articolo di Gal'perin fu pubblicato in una rivista sovietica nel 1969].
Giordan A. & De Vecchi G. (1987), *Les origines du savoir*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.
Godino J. & Batanero C. (1994), Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355. [Traduz. italiana Bologna, Pitagora 1999, come libro nella collana: Bologna-Querétaro].

Godino J. & Batanero C. (1998), The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. In: Malara N.A. (Ed.) (1998), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July 1996*. Modena, CNR-MURST-University of Modena.13-22. [Tr. it. *La matematica e la sua didattica*, 4, 1998].

Klausmeier H.J. (1979)*, Un modello per l'apprendimento dei concetti*, in: Pontecorvo C. & Guidoni P. (ed.) (1979).

Klausmeier H.J. (1980), *Learning and teaching concepts*. New York, Academic Press.

Klausmeier H.J., Gathala E.S. & Frayer d.A. (1974), *Conceptual learning and development*. New York and London, Academic Press.

Kutschera F. von (1979), *Filosofia del lenguaje*. Madrid, Gredos.

Luria A.R. (1982), *Language and Cognition*, (ed. by J. V. Wertsch). Washington, V. H. Winston.

Meirieu P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment*? Paris, ESF.

Nelson K. (1974), Concept, word and sentence: interrelations in acquisition and development. *Psychological Review*, 81, 4**.**

Nelson K. (1977), Cognitive development and the acquisition of concepts, in: Anderson R.S., Spiro r.J. & Montague W.E. (eds.) (1977).

Piaget J., Inhelder B. & Szeminska A. (1948), *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris, PUF.

Pontecorvo C. (Ed.) (1983), *Conoscenza scientifica e insegnamento*. Torino, Loescher.

Pontecorvo C. & Guidoni P. (1979), *Scienza e scuola di base*. Roma, Istituto della Enciclopedia Treccani.

Sierpinska A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24-36.

Speranza F. (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna, Pitagora.

Tornatore L. (1974), *Educazione e conoscenza*. Torino, Loescher.

Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.

Vygotskij L.S. (1960), *The development of higher forms of attention in* childhood. In: Werscht J.V. (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk NY, Sharpe 1981, 189-240. La I edizione russa è del 1960, Mosca, Izd. Akad. Pedag.

Vygotskij L.S. (1962), *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. Si tratta di un riassunto tratto dalla ed. originale in lingua russa, raccolta di articoli pubblicati a Mosca nel 1956. Ed. francese: 1985, Paris, ed. Sociale. Ed. italiana: 1990, Bari Laterza.

Voglio esprimere i ringraziamenti più profondi all'amico e collega Juan Godino, dell'Università di Granada, che mi ha aiutato suggerendomi alcuni testi e accettando di leggere criticamente alcune precedenti versioni di questo lavoro.